Veröffentlichungen

des

Lehrstuhls für Allgemeine Betriebswirtschaftslehre und Betriebliche Finanzwirtschaft, insbesondere Unternehmensbewertung

Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald

Herausgeber:

Prof. Dr. M. J. Matschke

Internet-Veröffentlichung Nr. 1

Dr. Thomas Hering

Arbitragefreiheit und Investitionstheorie

Januar 1997

Thomas Hering*

Arbitragefreiheit und Investitionstheorie

1. Problemstellung

Die auf Arbeiten von *K. J. Arrow* und *G. Debreu*[1] zurückgehende Theorie arbitragefreier Bewertung leistet einen grundlegenden Beitrag zur Erklärung der Preisbildung auf Kapitalmärkten. Auf einem im Gleichgewicht befindlichen Markt ist keine Arbitrage möglich, d.h.: Niemand kann sich durch Kombination von Kapitalmarktgeschäften zusätzliche Vorteile (Einzahlungen) verschaffen, ohne dafür Nachteile (Auszahlungen) in Kauf nehmen zu müssen.[2] Woran läßt sich nun erkennen, ob ein Wertpapiermarkt bei gegebenen Preisen arbitragefrei ist oder ob ein Investor durch geschickte Transaktionen einen sogenannten „free lunch" erzielen kann?

Zur Beantwortung dieser Frage sind vorab die Begriffe zu präzisieren. Unter einem „Zustand" t soll entweder ein Zeitpunkt oder eine für möglich erachtete künftige Situation verstanden werden.[3] Im ersten Fall ist für jedes Wertpapier j mit Sicherheit bekannt, welche Zahlung g_{jt} es im Zeitpunkt t erbringt. Die Interpretation der Zustände als Zeitpunkte bietet sich z.B. für die Analyse von Renten-

---

* Dr. Thomas Hering, Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald, Lehrstuhl für Allgemeine Betriebswirtschaftslehre und Betriebliche Finanzwirtschaft, insbesondere Unternehmensbewertung, Friedrich-Loeffler-Straße 70, 17489 Greifswald.

1 Vgl. *Debreu* (1959), *Arrow* (1964).

2 Vgl. *Kruschwitz* (1995), S. 41-44, 65-71, 161-166, *Spremann* (1996), S. 557-560, *Franke/Hax* (1994), S. 361 f.

3 Vgl. *Spremann* (1996), S. 559 f., *Franke/Hax* (1994), S. 362 f.

märkten an. Im zweiten Fall herrscht Unsicherheit, welche von n möglichen Situationen künftig eintreten wird; aber der mit dem Papier j in der Situation t verbundene Rückfluß g_{jt} ist bekannt. Diese Sichtweise der Zustände erlaubt beispielsweise die Modellierung von Aktien- und Optionsmärkten. Welche Interpretation auch jeweils gelten möge – in beiden Fällen sei einheitlich g_{j0} die Zahlung des Papiers j im gegenwärtigen Zeitpunkt t = 0.

Eine Arbitragemöglichkeit liegt vor, wenn es eine Kombination von Wertpapieren gibt, die in mindestens einem Zustand t zusätzliche Einzahlungen liefert, ohne in irgendeinem anderen Zustand zusätzliche Auszahlungen hervorzurufen.[4] Die Zusatzeinzahlung in t wird also durch keinen Nachteil erkauft, so daß jeder rational handelnde Investor diese Wertpapiermischung im größtmöglichen Umfang realisiert. Auf einem Kapitalmarkt ohne Mengenbeschränkungen könnte demnach in t ein unendlich hoher Geldbetrag entnommen werden, wenn nicht in der Realität die Wertpapierkurse (Preise) auf die umfangreichen Transaktionen des Arbitrageurs reagierten und das vermeintliche Perpetuum mobile stoppten.[5] Aber auch dann hätte es sich auf jeden Fall gelohnt, die Arbitragemöglichkeit entdeckt und so lange wie möglich genutzt zu haben.

Im folgenden soll untersucht werden, wie sich eine Arbitragemöglichkeit aufdecken oder – alternativ – die Arbitragefreiheit von Wertpapiermärkten bestätigen läßt. Die neoklassische Finanzierungstheorie hat diese Fragestellung für den Fall eines vollkommenen Marktes bereits eingehend abgehandelt. Es fehlt jedoch bislang ein integrierter An-

---

[4] Vgl. *Duffie* (1996), S. 3.

[5] Vgl. *Kruschwitz* (1995), S. 45.

satz, der einerseits sämtliche Arbitragemöglichkeiten erfaßt und andererseits in einfacher Weise auf den Fall eines unvollkommenen Marktes verallgemeinert werden kann.

Der vorliegende Beitrag entwickelt einen solchen einheitlichen Ansatz mit dem Instrumentarium der Investitionstheorie. Dadurch werden einerseits mathematische Hilfsmittel wie das Lemma von *Farkas* oder der Trennungssatz für konvexe Mengen durch das in der Betriebswirtschaftslehre geläufigere und leichter zu beweisende Dualitätstheorem der linearen Optimierung ersetzt, woraus eine erhebliche Vereinfachung der Herleitungen resultiert. Andererseits ist der investitionstheoretische Ansatz geradezu prädestiniert, Marktunvollkommenheiten wie z.B. Geld-Brief-Spannen oder Transaktionskosten zu behandeln, die in einer finanzierungstheoretischen Gleichgewichtsanalyse Schwierigkeiten bereiten.

2. Die Suche nach Arbitragemöglichkeiten

2.1. Arbitrage auf vollkommenen Märkten

2.1.1. Die schwache Arbitragefreiheitsbedingung

Bevor im nächsten Abschnitt der investitionstheoretische Ansatz formuliert wird, sei zum Vergleich die in der Finanzierungstheorie übliche Methodik der Behandlung von Arbitrageproblemen beispielhaft skizziert.

Im Jahre 1902 veröffentlichte *Julius Farkas* aus Klausenburg (Österreich-Ungarn) seine „Theorie der einfachen Ungleichungen“ im Berliner Journal für die reine und angewandte Mathematik. Sein „Grundsatz der einfachen Ungleichungen“ ist eine der ersten Aussagen über Dualität und erlangte große Bedeutung für die Entwicklung der linearen

Optimierung und der Spieltheorie (z.B. *George B. Dantzig*, *John von Neumann*). Er ist seitdem als das „Lemma von Farkas“ bekannt und besagt:[6]

Wenn eine lineare homogene Ungleichung für alle Lösungen eines linearen homogenen Ungleichungssystems erfüllt ist, dann ist sie eine nichtnegative Linearkombination der Ungleichungen des Systems.

$$\mathbf{p}^{T}\mathbf{x} \geq 0 \quad \mathbf{x} \quad \{\, \mathbf{x} \text{ ½ } \mathbf{B}^{T}\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \,\} \qquad \rho \geq \mathbf{0} \quad \text{mit} \quad \mathbf{B}\rho = \mathbf{p}$$

(Die Umkehrung „ “ gilt natürlich auch.)

Dieser Trennungssatz besitzt in der betriebswirtschaftlichen Theorie eine unmittelbare ökonomische Deutung als Arbitragefreiheitsbedingung. Um dies einzusehen, bedarf es lediglich einer ökonomischen Interpretation der Symbole:

Gegeben seien m Wertpapiere j mit den zustandsbedingten Rückflüssen g_{jt}, t {1, 2, ... , n}. Man stelle sich der Einfachheit halber vor, der Zustand t entspreche jeweils dem Zeitpunkt t. Das Papier j verursacht im Zeitpunkt 0 die Zahlung g_{j0}, d.h., sein Kaufpreis beträgt $-g_{j0}$. Die Kaufpreise seien im Vektor $\mathbf{p}$ ^{m} zusammengefaßt und die zustandsabhängigen Rückflüsse in der Matrix $\mathbf{B}$ $^{m\times n}$. Die im Vektor $\mathbf{x}$ ^{m} versammelten Variablen x_j geben an, mit welcher Menge das Papier j im Portefeuille enthalten sein soll. Positive x_j bedeuten Wertpapierkäufe, negative x_j Verkäufe. Sofern der Investor ein zu verkaufendes Papier nicht besitzt, emittiert er ein eigenes Papier zu den gleichen Konditionen. Der Kapitalmarkt ist also (zumindest

---

[6] Zum Beweis vgl. *Farkas* (1902), S. 5-7, *Dantzig* (1966), S. 159 f.

aus Sicht des betrachteten Investors) vollkommen. Dann folgt aus dem *Lemma von Farkas*:[7]

Entweder gibt es ein Arbitrageportefeuille $\mathbf{x}$, das in $t = 0$ eine Entnahme ermöglicht (also einen negativen Preis hat), ohne in den Zuständen 1 bis n zu einer Auszahlung zu führen, formal:

$$\mathbf{x} \quad {}^{m} \text{ mit } \mathbf{p}^{T}\mathbf{x} < 0 \text{ und } \mathbf{B}^{T}\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

Oder es existieren *nichtnegative* arbitragefreie Zustandspreise ρ_t (zusammengefaßt im Vektor $\rho \quad {}^{n}_{\geq 0}$) zur Bewertung der Zahlungen in den Zuständen $t = 1$ bis $t = n$, die dazu führen, daß für jedes Papier j der Wert seiner künftigen Rückflüsse genau dem bereits bekannten Marktpreis $-g_{j0}$ entspricht. Formal:

$$\rho \geq \mathbf{0} \text{ mit } \mathbf{B}\rho = \mathbf{p}$$

Die letzte Gleichung ist die *schwache Arbitragefreiheitsbedingung*.[8] Nach ihr ist der Kapitalmarkt also genau dann arbitragefrei, wenn Faktoren $\rho_t \geq 0$ existieren, so daß für jedes Wertpapier j $\{1, 2, \ldots, m\}$ gilt:

$$g_{j0} + \sum_{t=1}^{n} g_{jt} \quad \rho_t = 0$$

Wenn die Zustände Zeitpunkten entsprechen, bedeutet dies: Bei Arbitragefreiheit ist der *Kapitalwert* eines jeden Papiers j, berechnet mit den *Abzinsungsfaktoren* ρ_t, genau gleich null.[9] Der Abschluß von Geschäften lohnt sich also nicht.

---

[7] Vgl. *Spremann* (1996), S. 564 f., *Kruschwitz* (1995), S. 169, *Wilhelm* (1981), S. 901 f.

[8] Vgl. *Dermody/Rockafellar* (1991), S. 39 f., *Duffie* (1996), S. 13.

[9] Vgl. *Franke/Hax* (1994), S. 363, *Hering* (1995), S. 135.

Die Arbitragefreiheitsbedingung nach dem *Farkas*-Lemma heißt *schwach*, weil sie per Definition nur Arbitrage erfaßt, die im Zustand t = 0 zu einer Entnahmemöglichkeit führt. Eine derartig eingeschränkte Arbitragedefinition ist aber nicht sinnvoll, wie das folgende Beispiel zeigt. Betrachtet sei ein Kapitalmarkt mit zwei Papieren j und zwei künftigen Zuständen t:

Papier j	Preis in t = 0 $-g_{j0}$	Zahlung t = 1 g_{j1}	Zahlung t = 2 g_{j2}
1	1	0,05	1,1
2	1	0,10	1,1

Es gibt ersichtlich keine Möglichkeit, durch Kombination beider Papiere in t = 0 eine Einzahlung herbeizuführen, ohne zumindest im Zustand t = 2 eine Auszahlung hinnehmen zu müssen. Dies folgt auch aus dem Lemma von *Farkas*, denn es existieren die nichtnegativen Preise $\rho_1 = 0$ und $\rho_2 = 1/1{,}1$ mit $\mathbf{B}\rho = \mathbf{p}$.

$$\begin{pmatrix} 0{,}05 & 1{,}1 \\ 0{,}10 & 1{,}1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1/1{,}1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die schwache Arbitragefreiheitsbedingung ist zwar erfüllt, weil es keinen „free lunch” zu t = 0 gibt. Papier 1 ist aber offensichtlich dominiert. Wer es verkauft (oder zu diesen Konditionen am vollkommenen Markt Kredit aufnimmt) und in Papier 2 investiert, erzielt einen „free lunch” in t = 1. Das normierte Portefeuille $\mathbf{x} = (-1; 1)^T$ erzeugt in t = 1 die Einzahlung 0,05 und in t = 0 sowie t = 2 jeweils eine Zahlung von null.

Um solche Fälle auszuschließen, bedarf es einer verschärften Arbitragefreiheitsbedingung. Intuitiv leuchtet ein:

Die Zustandspreise ρ_t müssen auf einem im erweiterten Sinne arbitragefreien Markt offenbar positiv sein. Es widerspricht dem ökonomischen Prinzip, in einem bestimmten Zustand verfügbare Zahlungsmittel mit null zu bewerten, wie es im obigen Beispiel für t = 1 geschieht.

2.1.2. Die starke Arbitragefreiheitsbedingung

Um eine „starke Arbitragefreiheitsbedingung“ herzuleiten, die Arbitrage in *allen* Zuständen t   {0, 1, 2, ... , n} und nicht bloß in t = 0 ausschließt,[10] wird üblicherweise auf den Satz von *Stiemke* verwiesen[11] oder der Trennungssatz für konvexe Mengen herangezogen[12]. Im folgenden soll der Beweis auf wesentlich elementarere Weise geführt werden. Hierzu ist es lediglich erforderlich, die Portefeuille-optimierung als Investitionsproblem zu formulieren.

Gesucht wird ein reellwertiges Arbitrageportefeuille **x**, das in mindestens einem Zustand t (möglichst hohe) Geldentnahmen G_t erlaubt, ohne in anderen Zuständen zu Auszahlungen zu führen. Diese Optimierungsaufgabe ist eine Abwandlung der bekannten Kapitalbudgetierungsmodelle von *Hax* und *Weingartner*:[13] Die Zielfunktion maximiert nicht mehr den Endwert oder die Breite des Einkommensstroms, sondern den gewichteten[14] Entnahmewert $GW = G_0 + G_1 + ... + G_n$.

---

[10] Vgl. *Dermody/Rockafellar* (1991), S. 45.

[11] Vgl. *Garman/Ohlson* (1981), S. 274, Fußnote 3, *Duffie* (1996), S. 13. Zum Beweis des Satzes vgl. *Stiemke* (1915), *Dantzig* (1966), S. 160.

[12] Vgl. *Green/Srivastava* (1985), S. 259, *Duffie* (1996), S. 4. Zum Beweis des Satzes vgl. *Collatz/Wetterling* (1971), S. 203-205.

[13] Vgl. *Weingartner* (1963), S. 16 ff., *Hax* (1964), S. 435 ff.

[14] Die Gewichtungsfaktoren vor den Geldentnahmen G_t sind auf den Wert eins normiert worden. Alternativ können aber auch beliebige andere positive Zahlen als Gewichte gewählt werden. Auf den Wert der Ziel-

Um zu überprüfen, ob bei gegebenen Marktpreisen durch geschickte Kombination der Wertpapiere in irgendeinem Zustand t unendlich hohe Geldbeträge G_t entnommen werden können, braucht der Investor also nur das folgende lineare *Primalproblem* zu lösen:[15]

$$\text{max. GW; GW} := \sum_{t=0}^{n} G_t$$

$$-\sum_{j=1}^{m} g_{jt} \quad x_j + G_t \leq 0 \qquad\qquad t \quad \{0, 1, \ldots, n\}$$

$$x_j \qquad\qquad j \quad \{1, 2, \ldots, m\}$$

$$G_t \geq 0 \qquad\qquad t \quad \{0, 1, \ldots, n\}$$

Zu maximieren ist die Summe GW der einzelnen Geldentnahmen G_t unter der einleuchtenden Nebenbedingung, daß die Entnahme G_t in keinem Zustand t größer sein darf als die zu ihrer Finanzierung bereitstehenden Rückflüsse aus den Wertpapiergeschäften. Die Zielfunktion sucht nach zusätzlichen Einzahlungen, und die Nebenbedingungen stellen sicher, daß es dabei in keinem Zustand zu zusätzlichen Auszahlungen kommt. Die erweiterte Arbitragefreiheitsbedingung läßt sich nun aus dem zugehörigen *Dualproblem* ableiten. Es lautet:

$$\text{min. Z; Z} := \quad 0$$

$$-\sum_{t=0}^{n} g_{jt} \quad d_t = 0 \qquad\qquad j \quad \{1, 2, \ldots, m\}$$

$$d_t \geq 1 \qquad\qquad t \quad \{0, 1, \ldots, n\}$$

funktion hat dies keinen Einfluß, da entweder GW = 0 (Arbitragefreiheit) oder GW $\rightarrow \infty$ (Arbitrage) gilt.

[15] Eine ausführliche Darstellung der Eigenschaften des GW-Modells findet sich in *Hering* (1995), S. 75-88 und S. 96-100.

$$d_t \geq 0 \qquad\qquad t \quad \{0, 1, \ldots, n\}$$

Das Dualproblem besitzt eine triviale Zielfunktion und besteht also folglich nur darin, eine zulässige Lösung für das Gleichungssystem zu finden. Wegen der Forderung $d_t \geq 1$ t können die m Gleichungen jeweils durch $-d_0$ dividiert werden. Definiert man noch $\rho_t := d_t/d_0$, erweist sich der Lösungsraum des Dualproblems als:

$$g_{j0} + \sum_{t=1}^{n} g_{jt} \quad \rho_t = 0 \qquad\qquad j \quad \{1, 2, \ldots, m\}$$

$$\rho_t \geq 1/d_0 > 0 \qquad\qquad t \quad \{1, 2, \ldots, n\}$$

Das Dualproblem hat demnach dann und nur dann eine zulässige Lösung, wenn die bekannte Bedingung $\mathbf{B}\rho = \mathbf{p}$ in *positiven* Preisen ρ_t erfüllbar ist (*starke Arbitragefreiheitsbedingung*). Jede zulässige Lösung des Dualproblems führt zum Zielfunktionswert Z = 0 und ist somit zugleich Optimallösung. Existiert eine solche Lösung, so muß nach den Dualitätssätzen[16] auch der optimale Zielfunktionswert des Primalproblems null betragen, d.h., es ist dann keine Arbitrage möglich. Die Existenz eines Preisvektors $\rho > \mathbf{0}$ mit der Eigenschaft $\mathbf{B}\rho = \mathbf{p}$ stellt somit eine *hinreichende* Bedingung für starke Arbitragefreiheit dar.

Die *Notwendigkeit* der Arbitragefreiheitsbedingung sieht man wie folgt ein: Wenn das System $\mathbf{B}\rho = \mathbf{p}$ für $\rho > \mathbf{0}$ nicht erfüllbar ist, besitzt das Dualproblem keine zulässige Lösung. Da andererseits das Primalproblem mindestens eine zulässige Lösung hat ($x_j = 0$ j, $G_t = 0$ t), muß nach der Dualitätstheorie der Wert seiner Zielfunktion gegen unendlich streben. Ein endliches primales Optimum hätte nämlich die optimale Lösbarkeit des Dualproblems zur Konsequenz.

[16] Vgl. z.B. *Dantzig* (1966), S. 149 f., *Kolberg* (1992).

Wenn also keine Lösung $\rho > \mathbf{0}$ mit $\mathbf{B}\rho = \mathbf{p}$ existiert, gibt es zwangsläufig Arbitragemöglichkeiten.■

Die starke Arbitragefreiheitsbedingung folgt demnach *direkt* aus den (verhältnismäßig einfach zu beweisenden) Dualitätssätzen der linearen Optimierung.

Abschließend sei bemerkt, daß auch die schwache Arbitragefreiheitsbedingung sehr leicht als Spezialfall hergeleitet werden kann, ohne auf das *Farkas*-Lemma zurückzugreifen: Wenn nur Arbitrage im Zustand $t = 0$ betrachtet wird, entfallen im Primalproblem die Variablen G_1 bis G_n und entsprechend im Dualproblem die Restriktionen $d_t \geq 1 \quad t \quad \{1, \ldots, n\}$. Der Lösungsraum des Dualproblems erweitert sich damit auf $\mathbf{B}\rho = \mathbf{p}$ mit $\rho_t \geq 0 \quad t \quad \{1, 2, \ldots, n\}$; d.h., unter diesen Umständen reicht die schwächere Bedingung der Existenz nichtnegativer (anstatt positiver) Zustandspreise für die Arbitragefreiheit aus.

2.1.3. Arbitrage durch Kassenhaltung

Sofern die Zustände jeweils Zeitpunkten entsprechen, gibt es noch eine Klasse von Arbitragemöglichkeiten, die auch von der starken Arbitragefreiheitsbedingung übersehen wird. Um dies zu belegen, sei der folgende Kapitalmarkt mit inverser Zinsstruktur betrachtet:[17]

---

[17] Der vierjährige Zins wurde etwas höher als 3% gewählt, damit die Summe der Zinsen noch größer ist als bei dreijähriger Laufzeit.

j	$-g_{j0}$	g_{j1}	g_{j2}	g_{j3}	g_{j4}
1	1	1,06			
2	1	0,05	1,05		
3	1	0,04	0,04	1,04	
4	1	0,0301	0,0301	0,0301	1,0301

Auf den ersten Blick erscheint nichts ungewöhnlich. Löst man das Gleichungssystem $\mathbf{B}\rho = \mathbf{p}$, so ergibt sich: ρ_1 = 0,94340, ρ_2 = 0,90746, ρ_3 = 0,89035 und ρ_4 = 0,89068. Die starke Arbitragefreiheitsbedingung ist erfüllt. Dennoch bestehen Arbitragemöglichkeiten, sofern eine sehr schwache Annahme getroffen wird: Zusätzlich zu den vier Kapitalmarktpapieren existiere in jedem Zeitpunkt die (kostenlose) Möglichkeit, unverzinsliche Kassenbestände in unbegrenzter Höhe zu halten. Die Berechnung des impliziten Terminzinssatzes (Forward-Rate) vom Zeitpunkt 3 auf den Zeitpunkt 4 ergibt sodann:

$$i_4 = \frac{\rho_3}{\rho_4} - 1 = -0{,}04\%$$

Durch Kombination der Wertpapiere kann also zwischen t = 3 und t = 4 ein einperiodiger „synthetischer" Kredit mit einem negativen Sollzins aufgenommen werden. Da annahmegemäß Kassenhaltung zu einem Zins von 0% > -0,04% möglich ist, ist eine schrankenlose Verschuldung zum negativen Terminzins optimal. Die in t = 4 aus der Kassenhaltung zurückfließenden Mittel lassen sich mit Hilfe der Kapitalmarktpapiere auf den Zeitpunkt t = 0 vorziehen. Das folgende Schaubild zeigt den Konstruktionsplan dieser Arbitrage (normiert auf das Papier j = 2):

j	g_{j0}	g_{j1}	g_{j2}	g_{j3}	g_{j4}
1	0,943	-1			
2	1	-0,05	-1,05		
3	-100,254	4,01	4,01	104,26	
4	98,343	-2,96	-2,96	-2,96	-101,3
Kasse				-101,3	101,3
∑	0,03	0	0	0	0

Zu t = 0 „sprudelt" eine unbegrenzt ergiebige „Geldquelle". Die Arbitragemöglichkeit ist allerdings so gut versteckt, daß sie auch der geübte Betrachter nur durch genaues Nachrechnen findet. Die starke Arbitragefreiheitsbedingung bedarf offensichtlich der Verschärfung: Sofern die Zustände als Zeitpunkte interpretiert werden können und Kassenhaltung erlaubt ist, dürfen die positiven Zustandspreise (Abzinsungsfaktoren) ρ_t im Zeitablauf nicht zunehmen, weil sonst negative Kreditzinssätze auftreten.[18]

Dies läßt sich im Rahmen des investitionstheoretischen Ansatzes sehr leicht nachweisen: Falls sich die Zustände t = 1 bis t = n als aufeinanderfolgende Zeitpunkte interpretieren lassen und jederzeit unbeschränkt Kassenhaltung möglich ist, sind im Primalproblem n nichtnegative Variable x_j hinzuzufügen mit den zustandsbedingten Zahlungen

[18] *Dermody* und *Rockafellar* weisen darauf hin, daß Kassenhaltung in den meisten finanzierungstheoretischen Arbeiten zum Arbitrageproblem nicht explizit vorkommt. Vgl. *Dermody/Rockafellar* (1991), S. 39. Eine Ausnahme bildet z.B. auch die Arbeit von *Pichler*, die aber nur den Fall schwacher Arbitragefreiheit auf vollständigen Märkten untersucht. Vgl. *Pichler* (1995), S. 11-17 und S. 111-115.

$(g_{jt-1},\ g_{jt}) = (-1, +1)$. Im Dualproblem finden sich demnach n zusätzliche Restriktionen:

$$d_{t-1} - d_t \geq 0 \qquad\qquad t \quad \{1, 2, \ldots , n\}$$

Hieraus folgt per def. ($\rho_t = d_t/d_0$):

$$\rho_{t-1} \geq \rho_t \qquad\qquad t \quad \{1, 2, \ldots , n\}$$

Die gesuchten Zustands-Abzinsungsfaktoren ρ_t müssen also im Intervall zwischen null und eins liegen und dürfen im Zeitablauf nicht zunehmen. Nur dann sind negative implizite Zinssätze $i_t = \rho_{t-1}/\rho_t - 1$ ausgeschlossen. Durch diese zusätzliche Anforderung wird der Lösungsraum des Dualproblems weiter eingeschränkt. Der Kapitalmarkt ist genau dann arbitragefrei, wenn eine Lösung $\rho > \mathbf{0}$ mit $\mathbf{B}\rho = \mathbf{p}$ existiert, in der $\rho_{t-1} \geq \rho_t \quad t \quad \{1, 2, \ldots , n\}$ gilt.

2.1.4. Formeln für Zustandspreise auf Rentenmärkten

Auf Rentenmärkten werden üblicherweise (auch) endfällige Papiere mit jährlicher Zinszahlung gehandelt. Für diesen Spezialfall ist es nicht erforderlich, das System $\mathbf{B}\rho = \mathbf{p}$ mit Hilfe der linearen Algebra aufzulösen. Vielmehr lassen sich rekursive oder geschlossene Formeln ermitteln, welche eine effiziente, routinemäßige Berechnung der Zustandspreise erlauben (z.B. in Banken).

Am vollkommenen Kapitalmarkt existiere bei sicheren Erwartungen eine *Zinsstruktur* derart, daß für Geldanlagen und Kredite jeder Laufzeit t in unbegrenztem Umfang endfällige, jährlich zu verzinsende Papiere mit einem Marktpreis von p_t und einer Nominalverzinsung von $r_t \neq -1$ zur Verfügung stehen. Das Papier der Fristigkeit t besitzt also die (normierte) Zahlungsreihe $\pm\ (-p_t,\ r_t,\ r_t,\ \ldots ,\ r_t,\ 1 + r_t)$ mit Aufnahme des Kapitals im Zeitpunkt 0, insgesamt t Zinszahlungen zu den Zeitpunkten 1, 2, 3, ...

, t und Tilgung zum Nennwert im Zeitpunkt t. Die gesamte Zinsstruktur ist daher durch die Vektoren **p** := (p_1, p_2, p_3, ... , p_n) und **r** := (r_1, r_2, r_3, ... , r_n) eindeutig charakterisiert. Dann gilt für die Zustandspreise:[19]

$$\rho_t = \frac{p_t - r_t \sum_{\tau=1}^{t-1} \rho_\tau}{1 + r_t} \qquad t \quad \{0, 1, 2, ... , n\}$$

Beispiel. Für die Daten aus Abschnitt 2.1.3. ergibt sich zuerst ρ_0 := 1, anschließend ρ_1 = 1/1,06 = 0,9433962 und weiter:

$$\rho_2 = \frac{1 - 0{,}05 \;\; 0{,}9433962}{1{,}05} = 0{,}90746$$

Alternativ zu dieser Rekursionsvorschrift kann auch die folgende geschlossene Formel verwendet werden:

$$\rho_t = \frac{p_t - r_t \sum_{\tau=1}^{t-1} p_\tau \prod_{k=\tau}^{t-1} \left(1 + r_k\right)^{-1}}{1 + r_t} \qquad t \quad \{0, 1, ... , n\}$$

Beispiel. Für die oben angegebenen Daten errechnet sich ρ_3 direkt als:

$$\rho_3 = \frac{1}{1{,}04} - \frac{0{,}04}{1{,}04} \left(\frac{1}{1{,}06 \;\; 1{,}05} + \frac{1}{1{,}05} \right) = 0{,}89035$$

2.2. Arbitrage auf unvollkommenen Märkten

2.2.1. Arbitragefreiheitsbedingung bei Geld-Brief-Spannen

Die beschriebenen Zusammenhänge auf vollkommenen Kapitalmärkten gelten für die meisten Investoren in der Realität bestenfalls als Näherungen. Auch Wertpapiermärkte sind in

---

[19] Zum Beweis der folgenden Formeln vgl. *Hering* (1996), S. 101-106.

der Regel unvollkommen, und zwar zumindest in dem Sinne, daß der Kaufpreis der gehandelten Papiere über dem Verkaufspreis liegt (Existenz von Geld-Brief-Spannen aufgrund von Börsenspesen oder Bonitätsunterschieden) und generell auch andere Transaktionskosten anfallen.[20] Rechnerische Arbitragemöglichkeiten können sich durch diese Marktunvollkommenheiten u.U. schnell „in Luft auflösen“. Hinzu treten aus der Sicht des einzelnen Anlegers möglicherweise Verschuldungsrestriktionen (z.B. aufgrund fehlender dinglicher Sicherheiten) oder umgekehrt Kontingentierungen von Wertpapierkäufen (z.B. bei Überzeichnung).

Zunächst sei der Fall von Geld-Brief-Spannen untersucht. Während im Primalproblem des Abschnitts 2.1.2. die Variablen x_j nicht vorzeichenbeschränkt sind und die Zahlungsreihen für Kauf und Verkauf der Papiere jeweils durch Multiplikation mit -1 ineinander übergehen, erfordert die Existenz von Geld-Brief-Spannen die getrennte Behandlung von Käufen und Verkäufen. Wenn aus Sicht des Investors der Kaufpreis p_{jK} eines Papiers j den Verkaufspreis p_{jV} übersteigt, lautet die Zahlungsreihe des Kaufes: $(-p_{jK}, g_{j1}, g_{j2}, \ldots, g_{jn})$. Die zugehörige Variable x_{jK}, die angibt, wie viele Papiere des Typs j für das Portefeuille gekauft werden sollen, kann nur nichtnegative Werte annehmen. Analog enthält das Primalproblem zur Abbildung der Verkaufsmöglichkeit Zahlungsreihen $(p_{jV}, -g_{j1}, -g_{j2}, \ldots, -g_{jn})$ mit den zugehörigen Variablen $x_{jV} \geq 0 \quad j$. Das Dualproblem liest sich dann wie folgt:

[20] Vgl. *Dermody/Rockafellar* (1991), S. 32 und 37.

min. Z; Z := $\quad 0$

$$p_{jK} \quad d_0 - \sum_{t=1}^{n} g_{jt} \quad d_t \ge 0 \qquad j \quad \{1, 2, \ldots , m\}$$

$$-p_{jV} \quad d_0 + \sum_{t=1}^{n} g_{jt} \quad d_t \ge 0 \qquad j \quad \{1, 2, \ldots , m\}$$

$$d_t \ge 1 \qquad t \quad \{0, 1, \ldots , n\}$$

$$d_t \ge 0 \qquad t \quad \{0, 1, \ldots , n\}$$

Unter Berücksichtigung der Definition $\rho_t := d_t/d_0$ lautet der Lösungsraum des Dualproblems:

$$p_{jV} \le \sum_{t=1}^{n} g_{jt} \quad \rho_t \le p_{jK} \qquad j \quad \{1, 2, \ldots , m\}$$

$$\rho_t > 0 \qquad t \quad \{1, 2, \ldots , n\}$$

Bezeichnet man den Vektor der Kaufpreise mit $\mathbf{p}_K$ und den Vektor der Verkaufspreise mit $\mathbf{p}_V$, ist demnach (mit der gleichen Argumentation wie im Abschnitt 2.1.2.) die Existenz eines Preisvektors $\rho > \mathbf{0}$ mit $\mathbf{p}_V \le \mathbf{B}\rho \le \mathbf{p}_K$ notwendig und hinreichend für starke Arbitragefreiheit bei Geld-Brief-Spannen. Wenn die Zustände Zeitpunkten entsprechen und Kassenhaltung erlaubt ist, muß zusätzlich $\rho_{t-1} \ge \rho_t$ $t \quad \{1, 2, \ldots , n\}$ gelten.[21] In diesem Falle stellen die Zustandspreise ρ_t Abzinsungsfaktoren dar, und die Arbitragefreiheitsbedingung erlaubt folgende ökonomische Interpretation: Für jeden Wertpapierkauf bzw. -verkauf j gilt

---

[21] Vgl. Abschnitt 2.1.3. Für den Fall schwacher Arbitragefreiheit findet sich ein entsprechendes Resultat bereits bei *Pichler* (1995), S. 114 f. *Pichlers* Lösungsansatz ist allerdings im Gegensatz zum investitionstheoretischen GW-Ansatz nicht zur Berücksichtigung starker Arbitragefreiheit geeignet.

$$-p_{jK} + \sum_{t=1}^{n} g_{jt} \quad \rho_t \leq 0$$

bzw. $$p_{jV} - \sum_{t=1}^{n} g_{jt} \quad \rho_t \leq 0.$$

Das heißt: Der *Kapitalwert* jedes einzelnen Geschäfts ist kleiner oder gleich null. Ein positiver Kapitalwert würde nämlich wegen der fehlenden Mengenbeschränkungen für die Wertpapiergeschäfte zu einem unendlich hohen Entnahmebetrag GW führen, da jedes Geschäft mit positivem Kapitalwert annahmegemäß in beliebiger Stückzahl getätigt werden könnte. Arbitragefreiheit bedeutet also aus Sicht der Investitionstheorie, daß keine Veranlassung zum Handeln besteht, weil keines der zur Wahl stehenden Investitions- und Finanzierungsobjekte einen Vorteil verspricht. Arbitragegeschäfte lassen sich dagegen an ihrem positiven Kapitalwert erkennen.

2.2.2. Arbitragefreiheit bei Transaktionskosten

Die nächste Verallgemeinerung stellt nur noch einen kleinen Schritt dar: Durch Transaktionskosten (z.B. Depotgebühren) und Steuern geht der enge Zusammenhang zwischen den Zahlungsreihen für den Kauf und den Verkauf eines Wertpapiers auch in den späteren Zuständen t {1, 2, ...

, n} weitgehend verloren.[22] Im investitionstheoretischen Ansatz bilden die Zahlungsreihen der Wertpapierkäufe und -verkäufe nunmehr eigenständige Investitions- und Finanzierungsobjekte. Das Primalproblem aus Abschnitt 2.1.2. ist nur sehr leicht abzuwandeln: An die Stelle von m Objekten mit reellwertigen Variablen x_j treten 2 m Objekte mit nichtnegativen Variablen $x_j \geq 0$. Der Lösungsraum des Dualproblems ergibt sich nach den bekannten Umformungen als:

$$g_{j0} + \sum_{t=1}^{n} g_{jt} \quad \rho_t \leq 0 \qquad\qquad j \quad \{1, 2, \ldots, 2m\}$$

$$\rho_t > 0 \qquad\qquad t \quad \{1, 2, \ldots, n\}$$

Starke Arbitragefreiheit liegt genau dann vor, wenn dieser Lösungsraum nicht leer ist, wenn also positive (in der Zeitpunktinterpretation zusätzlich monoton fallende) Zustandspreise existieren, die für alle Geschäfte nichtpositive Kapitalwerte sicherstellen. Bezeichnet man der Einfachheit halber die in ihrem Umfang verdoppelte Zahlungsmatrix nach wie vor mit **B** und den Vektor der Zahlungen $-g_{j0}$ weiterhin mit **p**, gilt in Kurzform: Notwendig und hinreichend für die starke Arbitragefreiheit eines Wertpapiermarkts mit Transaktionskosten ist die Existenz eines Zustandspreisvektors $\rho > \mathbf{0}$ mit $\mathbf{B}\rho \leq \mathbf{p}$.

2.2.3. Arbitragefreiheit bei Obergrenzenrestriktionen

Sind schließlich auch noch aus Sicht des Investors individuelle Obergrenzenrestriktionen für die Wertpapierverkäufe (Kredite) und/oder die Wertpapierkäufe (Geldanlagen) zuge-

---

[22] In ihrer gleichgewichtstheoretischen Analyse weisen bereits *Garman/ Ohlson* (1981) auf S. 277 f. nach, daß Transaktionskosten in unvorhersagbarer Weise auf das System der Zustandspreise einwirken.

lassen, gelangt man vollends zu dem allgemeinen simultanen Investitions- und Finanzierungsmodell aus der Investitionstheorie.[23] Die Lösbarkeit des Dualproblems impliziert auch in diesem Falle, daß die primale Zielfunktion nach oben beschränkt ist (keine unbegrenzte Arbitrage). Weil die duale Zielfunktion aber nicht mehr identisch null ist, können u.U. durchaus endliche positive Entnahmen getätigt werden, und zwar dann, wenn durch Obergrenzen limitierte Wertpapiergeschäfte mit positivem Kapitalwert vorkommen. In diesem Sinne ist jede erfolgreich durchgeführte, d.h. entnahmeerhöhende betriebliche Investitions- oder Finanzierungsmaßnahme eine begrenzte Arbitrage.

3. Zusammenfassung und Folgerungen

Die Finanzierungstheorie kennt bislang keinen integrierten Ansatz, der allgemein genug ist, um

a) sämtliche Arbitragemöglichkeiten zu berücksichtigen (insbesondere auch starke Arbitrage und Arbitrage durch Kassenhaltung) und gleichzeitig

b) auf einfache Weise Marktunvollkommenheiten wie Geld-Brief-Spannen, Transaktionskosten, Steuern und Obergrenzenrestriktionen verarbeiten zu können.

Mit Hilfe der Investitionstheorie läßt sich ein derartiger Ansatz formulieren. Er besitzt darüber hinaus den Vorzug, eine schnellere, einfachere und vor allem einheitliche Beweisführung der (z.T. bereits aus der Finanzierungstheorie bekannten) Arbitragefreiheitsbedingungen zu ermöglichen. Aus dem investitionstheoretischen Ansatz resultiert:

- Ein vollkommener Wertpapiermarkt ist genau dann arbitragefrei, wenn Zustandspreise $\rho > \mathbf{0}$ mit der Eigenschaft $\mathbf{B}\rho$

---

[23] Vgl. den GW-Ansatz und sein Dualproblem in *Hering* (1995), S. 77 f.

= **p** existieren (starke Arbitragefreiheitsbedingung). Der Vektor ρ läßt sich für den Standardfall eines Rentenmarktes mit endfälligen, jährlich verzinsten Papieren leicht durch Formeln ermitteln.

· Im Falle von Geld-Brief-Spannen muß ρ (> **0**) die erweiterte Bedingung $\mathbf{p}_V \leq \mathbf{B}\rho \leq \mathbf{p}_K$ erfüllen.

· Wenn Transaktionskosten vorliegen, verdoppelt sich die Größe der Matrix **B** sowie des Vektors **p**, und die starke Arbitragefreiheitsbedingung lautet: $\rho > \mathbf{0}$ mit $\mathbf{B}\rho \leq \mathbf{p}$.

· Bei Existenz von Mengenbeschränkungen sind zusätzlich die Schattenpreise der Obergrenzenrestriktionen zu beachten, und es gelten die Ergebnisse der Lenkpreistheorie des unvollkommenen Kapitalmarkts.

· Sofern sich die Zustände als Zeitpunkte interpretieren lassen und jederzeit unbegrenzte Kassenhaltung erlaubt ist, verschärfen sich die angegebenen starken Arbitragefreiheitsbedingungen noch um die Forderung $\rho_{t-1} \geq \rho_t$ t {1, 2, ... , n}.

Für die praktische Umsetzung lassen sich folgende Empfehlungen geben: Auf einem vollkommenen Markt empfiehlt sich die Lösung des *Dualproblems*, weil der wesentliche Teil der Arbitragefreiheitsbedingung als Gleichungssystem vorliegt und deshalb leicht überprüft werden kann. Ist der Markt darüber hinaus vollständig, existiert sogar eine eindeutige Lösung ρ. Diese Eigenschaft wird auch von den beiden Formeln ausgenutzt, die auf vollkommenen und vollständigen Rentenmärkten mit endfälligen Papieren unmittelbar angewendet werden können. Sobald Kapitalmarktunvollkommenheiten zu berücksichtigen sind, entspricht die Arbitragefreiheitsbedingung einem Ungleichungssystem. Es ist dann wahrscheinlich anschaulicher, anstelle des Dualproblems das zugehörige *Primalproblem* zu lösen.

Insgesamt ist gezeigt: Hebt man einschränkende Prämissen sukzessiv auf, geht die finanzierungstheoretisch orientierte arbitragefreie Bewertung nahtlos in die Investitionstheorie des unvollkommenen Kapitalmarkts über. Die bekannten Arbitragefreiheitsbedingungen erweisen sich als natürliche, relativ einfach herzuleitende Spezialfälle der allgemeinen Lenkpreistheorie. Diese Überführung schlägt eine Brücke zwischen zwei häufig als unverbunden oder gar als inkompatibel angesehenen Theoriewelten. Damit ist zugleich der Nachweis erbracht, daß die theoretisch interessanten Kapitalbudgetierungsmodelle keineswegs so obsolet, unfruchtbar und praxisfern sind, wie es gelegentlich dargestellt wird.[24]

[24] Die große Ergiebigkeit der Dualitätstheorie für kapitalmarkttheoretische Untersuchungen wird auch von *Garman/Ohlson* hervorgehoben. Vgl. *Garman/Ohlson* (1981), S. 272 und 280.

Literatur

Arrow, K.J. (1964): The Role of Securities in the Optimal Allocation of Risk-bearing, in: Review of Economic Studies, 31. Jg. (1964), S. 91-96.

Collatz, L., Wetterling, W. (1971): Optimierungsaufgaben, 2. Aufl., Berlin/Heidelberg/New York 1971.

Dantzig, G.B. (1966): Lineare Programmierung und Erweiterungen, Berlin/Heidelberg/New York 1966.

Debreu, G. (1959): Theory of Value, New Haven/London 1959.

Dermody, J.C., Rockafellar, R.T. (1991): Cash Stream Valuation in the Face of Transaction Costs and Taxes, in: Mathematical Finance, 1. Jg. (1991), S. 31-54.

Duffie, D. (1996): Dynamic Asset Pricing Theory, 2. Aufl., Princeton 1996.

Farkas, J. (1902): Theorie der einfachen Ungleichungen, in: Journal für die reine und angewandte Mathematik, Band 124 (1902), S. 1-27.

Franke, G., Hax, H. (1994): Finanzwirtschaft des Unternehmens und Kapitalmarkt, 3. Aufl., Berlin u.a. 1994.

Garman, M.B., Ohlson, J.A. (1981): Valuation of Risky Assets in Arbitrage-free Economies with Transactions Costs, in: Journal of Financial Economics, 9. Jg. (1981), S. 271-280.

Green, R.C., Srivastava, S. (1985): Risk Aversion and Arbitrage, in: The Journal of Finance, 40. Jg. (1985), S. 257-268.

Hax, H. (1964): Investitions- und Finanzplanung mit Hilfe der linearen Programmierung, in: ZfbF, 16. Jg. (1964), S. 430-446.

Hering, Th. (1995): Investitionstheorie aus der Sicht des Zinses, Wiesbaden 1995.

Hering, Th. (1996): Rekursive und nicht-rekursive Formeln für einen Spezialfall arbitragefreier Bewertung, in: Rieper, B., Witte, Th., Berens, W. (Hrsg.), Betriebswirtschaftliches Controlling, Festschrift für D. Adam, Wiesbaden 1996, S. 97-113.

Kolberg, F. (1992): Hilfsblatt 4 zur Optimierungstheorie, Münster 1992.

Kruschwitz, L. (1995): Finanzierung und Investition, Berlin/ New York 1995.

Pichler, S. (1995): Ermittlung der Zinsstruktur, Wiesbaden 1995.

Spremann, K. (1996): Wirtschaft, Investition und Finanzierung, 5. Aufl., München/Wien 1996.

Stiemke, E. (1915): Über positive Lösungen homogener linearer Gleichungen, in: Mathematische Annalen, Band 76 (1915), S. 340-342.

Weingartner, H.M. (1963): Mathematical Programming and the Analysis of Capital Budgeting Problems, Englewood Cliffs 1963.

Wilhelm, J. (1981): Zum Verhältnis von Capital Asset Pricing Model, Arbitrage Pricing Theory und Bedingungen der Arbitragefreiheit von Finanzmärkten, in: ZfbF, 33. Jg. (1981), S. 891-905.

Deutsche Zusammenfassung

Die gleichgewichtsorientierte Finanzierungstheorie leitet Arbitragefreiheitsbedingungen für Wertpapiermärkte z.B. aus dem Trennungssatz für konvexe Mengen ab. Betrachtet man jedoch das Arbitrageproblem als Spezialfall der Investitionstheorie, können zentrale Ergebnisse sowohl wesentlich allgemeiner als auch einfacher gezeigt werden. Die investitionstheoretische Sichtweise deckt in einem einheitlichen Ansatz sämtliche Arbitragemöglichkeiten ab und erlaubt auch problemlos die Analyse unvollkommener Märkte mit Geld-Brief-Spannen und Transaktionskosten.

Englische Zusammenfassung

The financial equilibrium theory uses to derive no-arbitrage conditions from *Farkas*´s lemma or the separating hyperplane theorem. However, application of capital budgeting theory yields the main results with much more generality but still less mathematical effort. The analysis can easily be extended to examine imperfect capital markets, i.e., situations characterized by bid-ask spreads, other transaction costs, taxes, or borrowing constraints. For a standard case, recursive and non-recursive formulae allow to compute state-prices very quickly. It is interesting that state pricing can be interpreted as a special case of the well-known theory of capital budgeting.